



## Számoljunk ügyesen!

Sokszor találkozunk olyan számolási feladattal, amit első ránézésre nehéznek tűnik elvégezni. Végeláthatatlannak, vagy átláthatatlannak tűnik a számolás. A következőkben nézzünk néhány módszert, amivel könnyebben célba érünk.

### Mintapéldák

Időnként az segít, ha nem balról jobbra végezzük el a műveleteket, hanem egy ügyes sorrendben.

1. Mennyi a következő kifejezés értéke?  
 $1-2+3-4+5-6+7-8+\dots+2013-2014$

Első ránézésre egy hosszadalmas számolás, de ha ügyesen zárójelezünk, azaz:

$(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+\dots+(2013-2014)$  akkor mindegyik zárójelen belül  $-1$  van, és 1007 ilyen pár van, vagyis  $-1007$  a válasz.

2. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} + \frac{65}{64} - 7$$

A 7-et egyenként elvéve az összeg átírható következő alakba:

$$-1 + \left(\frac{3}{2} - 1\right) + \left(\frac{5}{4} - 1\right) + \left(\frac{9}{8} - 1\right) + \left(\frac{17}{16} - 1\right) + \left(\frac{33}{32} - 1\right) + \left(\frac{65}{64} - 1\right) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} =$$

$$-1 + \frac{32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{64} = -1 + \frac{63}{64} = \frac{-1}{64}$$

3. Határozd meg az emeletes tört értékét!

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3+1}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

4. Számítsd ki a következő összeget!

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$$

A nevezőket alkalmasan alakítva szorzattá, látható:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

Észrevehető, hogy  $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ , hasonlóan  $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ .

Ezt a bontást az összeg minden tagjára alkalmazva:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

A megoldásban a zárójelek felbontása után kialakuló összeget teleszkópikus összegnek nevezzük, hiszen az összevonásokat elvégezve csak az első és utolsó tag marad.

5. Léteznek teleszkópikus szorzatok is, ezt látjuk a következő feladatban:  
Számítsd ki a következő szorzatot!

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

A törtet egyszerűsítve az eredmény  $\frac{1}{8}$

6. Mivel egyenlő  $9999 + 999 + 99 + 9$ ?

Vegyük észre, hogy mindegyik összeadandó tíz egy hatványánál eggyel kisebb. Így ránézve:  
 $10000 - 1 + 1000 - 1 + 100 - 1 + 10 - 1 = 11110 - 4 = 11106$ .

### Gyakorló feladatok

1. Végezzük el a következő műveleteket!

$$2 - \frac{12}{5} + \frac{52}{25} - \frac{252}{125} + \frac{1252}{625} - \frac{6252}{3125}$$

2. Határozd meg a tört értékét!

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

3. Számítsd ki a következő összeget (Figyeld a nevezőket, alakítsd alkalmasan szorzattá, használd a 4. mintapélda tapasztalatait)!

$$\frac{5}{14} + \frac{5}{84} + \frac{5}{204} + \frac{5}{374} + \frac{5}{594} + \frac{5}{864} + \frac{5}{1184}$$

4. Határozd meg a szorzat eredményét!

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2013}\right)$$

## Kitűzött feladatok

1. Végezd el a következő műveleteket!

$$2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{9} - \frac{29}{27} + \frac{79}{81} - \frac{245}{243} + \frac{727}{729} - \frac{2189}{2187}$$

2. Határozd meg a következő értéket!

$$\frac{2 - \frac{3}{2 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{3}{2 - \frac{1}{-1 + \frac{1}{\frac{2}{3} - 1}}}}$$

3. Számítsd ki a következő összeget!

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} + \dots + \frac{1}{9999}$$

4. Gondoltam egy számot. Ezt megszoroztam a gondolt szám  $\frac{1}{2}$  részével, majd az eredményt a gondolt szám reciprokának a háromszorosával. Az így kapott számot szoroztam a gondolt szám reciprokának, a kétszeresének és a gondolt szám harmadrészének a szorzatával. Végül az eredményt elosztottam a gondolt szám felével. Milyen számot kaptam eredményül?

Beküldési határidő:  
Postai cím:

**2013. 11. 17.**  
Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ  
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.